Tentamen Computerondersteund Probleemoplossen

15 april 2010, 9.00-12.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven waarvoor in het totaal negen punten te behalen zijn. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Totaal: 9 +1 (gratis) = 10. Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van aantekeningen, boeken, en een (grafische) rekenmachine is niet toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes.

1. We willen het nulpunt $\sqrt{2}$ van de functie $f(x) = x^2 - 2$ benaderen.

   (a) Het nulpunt ligt tussen 1 en 2. Bereken uitgaande van het interval $[1, 2]$ de eerste twee benaderingen m.b.v. de bisectie-methode.

   (b) Hoeveel bisecties van het interval $[1, 2]$ zijn er nodig om een benaderingsfout kleiner dan 10^{-2} te krijgen?

   (c) De methode van Newton leidt tot een iteratievoorschrift van de vorm $x_{k+1} = g(x_k)$. Bepaal de functie $g(x)$.

   (d) Neem $x_0 = 1$ en bereken x_2 volgens de methode van Newton.

   (e) Wanneer we x_3 volgens de methode van Newton uitrekenen, zien we dat de eerste drie cijfers van x_3 overeenkomen met de eerste drie cijfers van x_2. Schat het aantal correcte cijfers in x_3, zonder x_3 te bepalen. Motiveer!

2. We beschouwen de matrix

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   De exacte LU-ontbinding van A wordt gegeven door

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}.$$

   (a) Neem aan dat ε een zeer klein positief getal is (veel en veel kleiner dan 1). Leg uit welk probleem optreedt indien we het stelsel $Ax = b$ (voor gegeven b) numeriek oplossen m.b.v. een (benaderende) LU-ontbinding.

   (b) Hoe is het probleem uit onderdeel (a) op te lossen?

3. Gegeven is de integraal

$$I = \int_0^1 e^x \, dx$$

   M.b.v. de geschakelde trapeziumregel zijn de volgende benaderingen $t(h)$ van I berekend ($h = 1/n$):

n	$T(h)$
1	1.8591409
2	1.7539311
4	1.7272219
8	1.7205186

(a) Schets de grafiek van f voor $0 \leq x \leq 1$, en schets de benadering van I volgens de trapeziumregel bij $h = 1$.

(b) Geef (zonder bewijs) de theoretische convergentie-orde van de trapeziumregel.

(c) Onderzoek de convergentie-orde van $T(h)$.

(d) Welk van bovenstaande resultaten is het nauwkeurigst? Schat de fout in deze benadering af.

4. We beschouwen de differentiaalvergelijking

$$y'(t) = \lambda y(t) + t$$

waarbij $t > 0$. De beginvoorwaarde luidt $y(0) = 1$; λ is een gegeven constante. Om dit probleem numeriek te benaderen kiezen we een tijdstap h. De benaderde oplossing op tijdstip $t = nh$ (waarbij $n = 0, 1, 2, ..$) noemen we y_n.

(a) Geef de relatie tussen y_{n+1} en y_n indien de differentiaalvergelijking wordt benaderd m.b.v. de voorwaartse Euler methode.

(b) Neem $\lambda = -1$. Voor welke waarden van h is de voorwaartse Euler methode (absoluut) stabiel?

(c) Geef de relatie tussen y_{n+1} en y_n indien de differentiaalvergelijking wordt benaderd m.b.v. de achterwaartse Euler methode.

(d) Neem $\lambda = -1$. Voor welke waarden van h is de achterwaartse Euler methode (absoluut) stabiel?

(e) Geef de relatie tussen y_{n+1} en y_n indien de differentiaalvergelijking wordt benaderd m.b.v. de trapeziumregel.

Detailnormering:

1a	0.5	2a	1.0	3a	0.5	4a	0.5
b	0.5	b	0.5	b	0.5	b	0.5
c	0.5			c	0.5	c	0.5
d	0.5			d	1.0	d	0.5
e	0.5					e	0.5

8?